

# **Untersuchung des Verhaltens eines Chaospendels mithilfe des Ortsraumes**



**Schüler experimentieren 2019**  
**Jason Luke von Juterczenka (13)**  
**Heinrich-Grupe-Schule**  
**Fachbereich Physik**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Was ist Chaos?</b> .....	<b>1</b>
1.1 Die Anfänge der Chaosforschung .....	1
1.2 Chaos in der Natur .....	1
<b>2. Der Phasenraum</b> .....	<b>2</b>
2.1 Einführung in den Phasenraum .....	2
2.2 Punktattraktoren .....	2
2.3 Grenzykelattraktoren .....	2
2.4 Seltsame Attraktoren .....	3
<b>3. Das Chaospendel</b> .....	<b>4</b>
3.1 Das Chaospendel im Phasenraum .....	4
3.2 Das Chaospendel als nichtlineares System .....	4
3.3 Besonderheiten meines Chaospendels .....	5
<b>4. Hemmt Reibung chaotisches Verhalten?</b> .....	<b>5</b>
4.1 Das Ergoden-Theorem .....	5
4.2 Möglichkeit der Charakterisierung von Chaos durch das Ergoden-Theorem .....	6
<b>5. Die Anfänge meines Projektes</b> .....	<b>6</b>
5.1 Visualisierung des Chaos .....	6
5.2 Methoden zur Datensammlung .....	6
5.3 Darstellungsmöglichkeiten .....	6
<b>6. Messungen mit Variierung der Anregungsfrequenz</b> .....	<b>7</b>
<b>7. Messungen zum Einfluss der Reibung</b> .....	<b>10</b>
7.1 Zeitabhängige Untersuchung der Reibung .....	10
7.2 Möglichkeiten zur Variierung der Reibung .....	10
7.3 Quantifizierung und Skalierung des Reibungseinflusses .....	11
7.4 Ergebnisse und Interpretation der Messreihe .....	11
<b>8. Erstellung eines Phasenraumes</b> .....	<b>14</b>
8.1 Dimensionen des Phasenraumes .....	14
8.2 Erwartete Erscheinung des Phasenraumes .....	14
<b>9. Fazit</b> .....	<b>15</b>
9.1 Beantwortung der Fragestellung .....	15
9.2 Zukunftsaussichten .....	15
<b>10. Quellen, Bilderverzeichnis und Literatur</b> .....	<b>I</b>

## 1. Was ist Chaos?

In diesem Abschnitt erläutere ich die Entstehung der Chaosforschung und die ersten Anwendungen auf das Dreikörperproblem.

### 1.1 Die Anfänge der Chaosforschung

Unsere Welt wirkt absolut geordnet: Die Planeten ziehen ihre Bahnen scheinbar Milliarden Jahre gleichmäßig um die Sonne. Verschiedenste Populationen lassen sich viele Jahrzehnte vorausberechnen und selbst in der Biologie, der Wirtschaft oder sogar der Sozialwissenschaft scheinen die meisten Vorgänge vollkommen geordnet abzulaufen. Doch der Schein trügt. Dies fand man jedoch durch ein anderes Phänomen heraus, das Wetter. Es ging darum, zuverlässigere Wettervorhersagen zu entwickeln. Edward Lorenz, der heute als der Begründer der Chaosforschung gilt, gab dazu die Zahl 0,506127 in den Großrechner des MIT ein. Doch als er bei einer weiteren Simulation die letzten drei Ziffern vergaß, kam dabei etwas Absonderliches heraus. Die Ergebnisse waren völlig anders als beim ersten Durchlauf. Damals hätte man erwartet, dass bei dieser verhältnismäßig kleinen Abweichung auch eine entsprechend kleine Veränderung des Ergebnisses entsteht, doch so war es nicht. Das war nicht nur der Moment, in dem klar wurde, dass wir niemals perfekte Wettervorhersagen haben werden, sondern es war auch die Geburtsstunde der Chaosforschung. Der Begriff Chaos ist keineswegs neu, schon in der griechischen Philosophie findet man ihn. Doch die Vorstellung des Begriffes wurde durch die Chaosforschung revolutioniert. Immer wurde das Chaos als eine *Störung* interpretiert, die durch mangelnde Daten oder die Summierung kleiner äußerer Einflüsse entstand. Es war ein *Rauschen*, welches durch die Vielzahl der Einflüsse entsteht, die aber selbst geordneter Natur sind. Nach der damaligen Vorstellung sollte ein System, das man in eine Kiste sperrt und so komplett von der Außenwelt abschirmt absolut vorhersehbar und bis in alle Ewigkeit stabil sein. Doch seit der Chaosforschung ist klar, dass die Fähigkeit, Chaos zu produzieren, in den Systemen selbst steckt, zumindest in manchen. Wir bemerken diese Fähigkeiten auch in Systemen, in denen uns vielleicht lieber wäre, wäre das nicht der Fall.

### 1.2 Chaos in der Natur

Der Mathematiker Henri Poincaré untersuchte die Bahnen der Planeten unseres Sonnensystems im 19. Jahrhundert, als die Newtonsche Mechanik noch als die ultimative Theorie der Gravitation galt. Doch er fand heraus, dass die von Newton berechneten Bahnen nur in einem System aus zwei Körpern uneingeschränkt gelten (mittlerweile wissen wir, dass sie auch dort nicht uneingeschränkt gelten). Was jedoch passiert mit einem System aus drei oder sogar noch mehr Körpern? Ein dritter Körper macht das System nichtlinear, er verändert es auf eine elementare Art. Und plötzlich gelten andere Gesetze für das System. In einem nichtlinearen System ist die Wirkung nicht proportional zur Ursache. Was sich unbedeutend anhört, entpuppt sich als fundamental. Denn es bedeutet, dass bei jenem System, welches aus mehr als zwei Körpern besteht, jede noch so kleine Veränderung einen vollkommen unvorhersehbaren und chaotischen Endzustand hervorrufen kann. Anders als in der allgemeinen Überzeugung sind die meisten Phänomene der Naturwissenschaft nichtlinear. Dazu zählen wie oben schon genannt das Wetter, aber auch Phänomene der Medizin oder sogar des Aktienhandels. Selbst die Entstehung der Finanzkrise 2007 hat ihre Wurzeln in der Chaostheorie. Es gibt jedoch noch ein weiteres Beispiel. Auch unser Sonnensystem ist ein nichtlineares System, kann also prinzipiell irgendwann ins Chaos übergehen. Das ist jedoch abhängig von einem weiteren Faktor, der Existenz von Bahnresonanzen zwischen den Planeten des Sonnensystems. Diese Abhängigkeit entspringt einem elementaren Bestandteil der Chaosforschung, den man im sogenannten Phasenraum darstellen kann.



*Abb.1: Der Saturnmond Hyperion rotiert chaotisch um seine Achse, es ist also unvorhersehbar, wie er sich dreht.*

## 2. Der Phasenraum

Im folgenden Kapitel werde ich zeigen, wie man chaotische Vorgänge im Phasenraum darstellen kann und in die Dynamik des Phasenraumes einführen.

### 2.1 Einführung in den Phasenraum

Der Phasenraum ist ein abstrakter mathematischer Raum, der nichts mit unserem dreidimensionalen Raum zu tun hat. Er bildet in allgemeiner Form den Ort auf den Impuls, also der Ortsveränderung ab und beschreibt so alle Zustände des Systems in einem einzigen Diagramm, was ihn zum perfekten Werkzeug der Chaosforschung macht.

### 2.2 Punktattraktoren

In diesem Phasenraum gibt es einen besonderen Bereich, den Attraktor. Der Begriff leitet sich aus dem lateinischen ab (*ad trahere* – zu sich hin ziehen). Genau das tut der Attraktor auch, er zieht das gesamte System zu sich hin, egal wo es seinen Ursprung hat. Der Attraktor ist der Bereich, in dem der Übergang von einem Zustand in den nächsten stattfindet. Bei kochendem Wasser ist es der Siedepunkt, bei Brückenpfeilern das maximal tragbare Gewicht, bei einem Luftballon das Volumen, welches er maximal erreichen kann. Es ist der Bereich im Phasenraum, den das System anstrebt, der seinen Endzustand verkörpert, indem es dann verharrt. Bei einem mathematischen Pendel im Vakuum ist der Attraktor die Ruhelage, nur dass sich anschließend die Drehung wiederholt und wieder im Attraktor endet. Der Attraktor kann verschiedenste topologische Formen annehmen. Im einfachsten

Fall ist das ein Punkt. Ein punktförmiger Attraktor kommt beispielsweise bei einem hüpfenden Ball vor. Die Entropie nimmt zu und die Bewegungsenergie wird zu thermischer Energie. Ruht der Ball schließlich, ist der Attraktor, der Endzustand erreicht. Die Bahn bewegt sich im Phasenraum also auf diesen Punkt zu, wie man es in Abb.2 sehen kann.

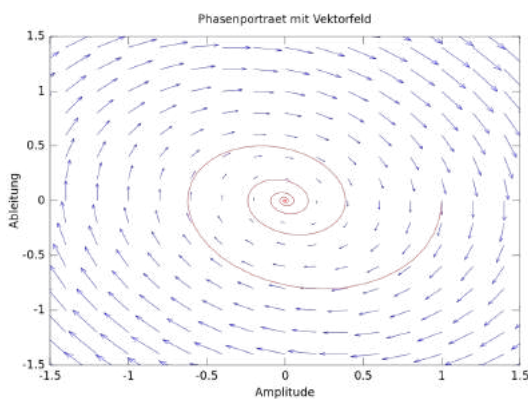


Abb.2: Ein System welches gedämpft wird und an Energie verliert, bewegt sich im Phasenraum auf einen Punkt zu.

### 2.3 Grenzykelattraktoren

Eine weitere Möglichkeit ist der Grenzykelattraktor. Ein Grenzykelattraktor kommt in einem System vor, das immer wieder in einen ähnlichen Zustand zurückkehrt, einen gewissen Vorgang also in leicht abweichender Form immer und immer wieder durchläuft. Ein sehr beliebtes Beispiel für ein solches System sind die Räuber-Beute-Modelle. Auch ohne äußere Einflüsse schwankt das Verhältnis der Populationen von Beute und Räuber in einem quasiperiodischen Zyklus. Häufig als Beispiel verwendet wird ein See, in dem sich Raubfische und Beutefische befinden. Im ersten Jahr ist ein Überfluss an Beutefischen vorhanden. Die Raubfische fressen sich voll und vermehren sich prächtig, die Anzahl der Beutefische geht zurück. Doch ab einer gewissen Schwelle wendet sich das Blatt. Irgendwann sind nicht mehr genügend Beutefische vorhanden und zu viele Raubfische bevölkern den See. Das hat zur Folge, dass die Population der Raubfische kleiner wird. Dadurch erholt sich die der Beutefische, bis zu einem Punkt, an dem wieder genügend Beutefische für alle Raubfische vorhanden sind und der Kreislauf von vorne beginnt. Der Punkt, an dem sich das Blatt wendet und die Raubfische an ihrer eigenen Bevölkerung sterben, ist in diesem System der Attraktor. Hierbei handelt es sich um einen Grenzykelattraktor. Dieser Rhythmus wiederholt sich regelmäßig und ist sehr stabil. Selbst wenn in einem Jahr fast alle Beutefische durch äußere Einflüsse wie dem Klima oder einer Krankheit sterben, wird das System in seinen Rhythmus zurückfinden, denn es *versucht*, stabil zu bleiben. Jedes Ökosystem hat dadurch eine gewisse Stabilität. In diesem Fall geschieht das durch ein Netz verschiedenster biotischer Faktoren (Fressfeinde, Konkurrenten, Parasiten), das der Änderung durch abiotische Faktoren (Strahlung, Temperatur, Klima) widersteht. Auch diese Stabilität gibt Abb.3 wieder.

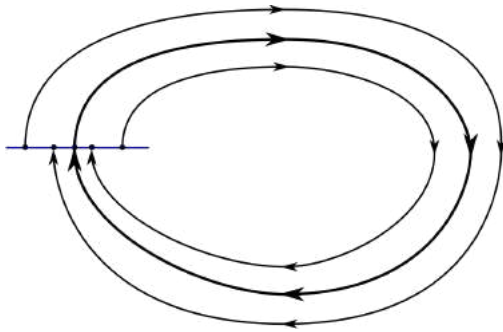


Abb.3: Das System durchläuft einen gewissen Vorgang in ähnlicher Form immer wieder, wie auch das Verhältnis zwischen Räuber und Beute in einem geschlossenen Ökosystem.

## 2.4 Seltsame Attraktoren

Bei beiden Arten von Attraktoren ist noch eine gewisse Ordnung zu finden, auch wenn es sich bei dem Phasenraum mit Grenzzykelattraktor nur um die Beschreibung eines quasiperiodischen Systems handelt. Doch es gibt noch viel abstraktere Attraktoren, wie etwa der sogenannte seltsame Attraktor. Hierbei handelt es sich um die Beschreibung chaotischen Verhaltens. Das System bleibt in keinem Rhythmus und es nähert sich auch keinem Punkt an. Es gibt verschiedene Arten von seltsamen Attraktoren, sie alle können allerdings nur in Phasenräumen mit mindestens drei Dimensionen vorkommen. Der bekannteste und älteste ist der Lorenz-Attraktor. Das ist jener Attraktor, der sich bei Edward Lorenz' Versuch ergab, die Atmosphäre zu modellieren, welche ja ebenfalls ein nichtlineares System ist.

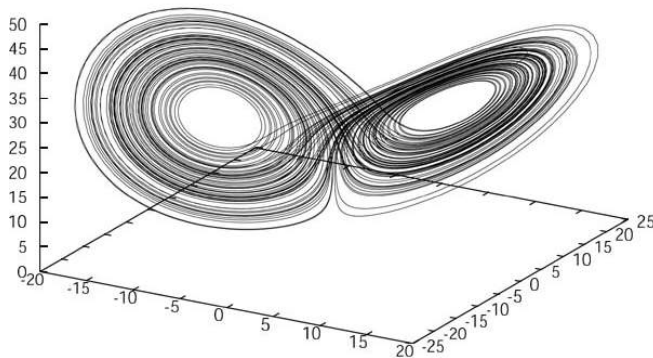


Abb.4: Ein Lorenz-Attraktor

Alle seltsamen Attraktoren durchziehen ein Gebiet des Phasenraums, etwa einen Torus (eine geometrische Figur, die einem Donut ähnelt). Das ist auch der Grund für die Abhängigkeit der Stabilität der Planetenbahnen von Bahnresonanzen. Gibt es keine Bahnresonanzen, handelt es sich um einen Grenzzykelattraktor, also ein quasiperiodisches System, welches

relativ stabil ist. Sind jedoch Resonanzen vorhanden, so verläuft die Bahn im Phasenraum jedes Mal in sich selbst zurück. Dadurch entsteht eine Rückkopplung. Bei jeder Runde wird die Störung verstärkt, wie etwa auch der Ton, der durch die Rückkopplung zweier zu nahe aneinander stehender Verstärker entsteht. Dies bewirkt im Phasenraum, dass sich die Oberfläche des Torus ausdehnt. Der Planet wird natürlich weiter von ihr angezogen, es handelt sich ja um einen Attraktor, und wird auf eine Bahn gelenkt, die ihn aus dem Sonnensystem katapultiert. Eindrucksvoll zeigt sich dies in den sogenannten Kirkwoodlücken. Das sind Lücken innerhalb des Asteroidengürtels zwischen Mars und Jupiter, in denen sich seltsamerweise fast keine Asteroiden befinden. Diese Lücken entsprechen genau den Regionen, in denen Asteroiden eine ganzzahlige Bahnresonanz zu Jupiter hätten. Zum Glück gibt es in absehbarer Zeit keine ganzzahligen Bahnresonanzen zwischen den Planeten des Sonnensystems.

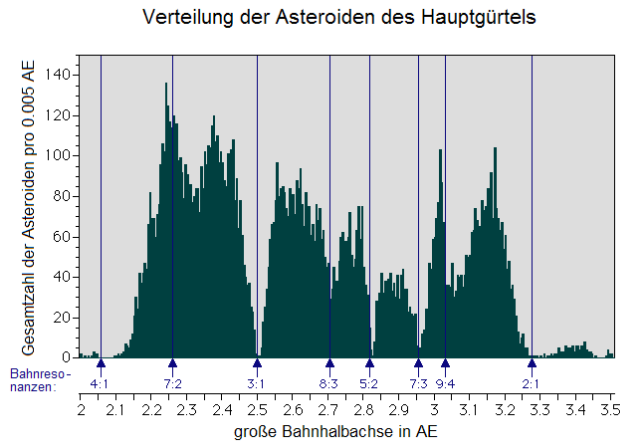


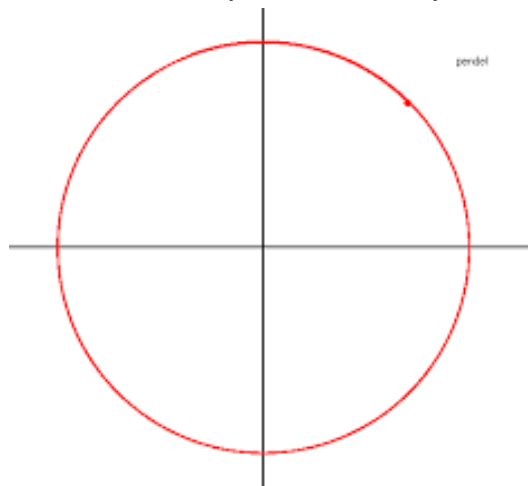
Abb.5: In den Kirkwoodlücken hätten Asteroiden eine Bahnresonanz mit Jupiter und somit keine stabile Bahn.

### 3. Das Chaospendel

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, ein chaotisches Verhalten zu erzeugen. Eines der einfachsten werde ich in diesem Kapitel vorstellen.

#### 3.1 Das Chaospendel im Phasenraum

Eines der einfachsten nichtlinearen Systeme ist das Chaospendel. Das ist ein Pendel, an welches ein zweites Pendel angehängt wird. Ein Pendel hat nur einen Freiheitsgrad, während ein Doppelpendel zwei Freiheitsgrade hat. Der Zustand eines Doppelpendels kann nur mit zwei Drehwinkeln beschrieben werden, für ein einfaches Pendel reicht einer. Indem man das zweite Pendel anhängt, gibt man ihm also einen weiteren Freiheitsgrad und erhöht so die Anzahl der Dimensionen des Phasenraums um zwei, nämlich um die zusätzliche Orts- und Impulskoordinate des hinzugefügten Freiheitsgrades. Diese Veränderung reicht, um aus dem Pendel, einem Musterbeispiel für Ordnung ein nichtlineares System, also ein System, welches in der Lage ist, Chaos zu produzieren, zu machen.



Wie jedes nichtlineare System, kann man auch das Chaospendel in einem Phasenraum darstellen. Betrachten wir zunächst die Dynamik eines einfachen Pendels. Zunächst verlangsamt sich das Pendel, bis zur größten Auslenkung, wo es kurz zur Ruhe kommt, die Richtung wechselt und wieder Geschwindigkeit aufbaut. Die höchste Geschwindigkeit hat es, wenn es senkrecht steht, also am Punkt der eigentlichen Ruhelage. Dann wird es wieder langsamer, erreicht wieder die größte Auslenkung und kommt dort zur Ruhe und so ginge es mit einem idealisierten Pendel immer weiter. Da das Pendel den gleichen Vorgang immer wieder ausführt, wird es in einem Phasenraum durch eine geschlossene Bahn dargestellt.

Abb.6: Der Phasenraum (Ort-Impuls) eines idealisierten Pendels.

#### 3.2 Das Chaospendel als nichtlineares System

Bei einem Pendel handelt es sich um ein System, welches gedämpft wird, deshalb kommt in dem zugehörigen Phasenraum ein Punkttattraktor vor. Da es sich bei dem oben gezeigten Phasenraum um ein idealisiertes Pendel handelt, welches nicht zu Ruhe kommt, sieht man auch keinen Punkt, auf welchen sich der Graph zubewegt. Ein gewöhnliches Pendel, welches äußeren Einflüssen wie etwa Luftreibung unterlegen ist, wird immer langsamer und nähert sich deshalb der Nullkoordinate für Geschwindigkeit an, also der Mitte des Phasenraumes. Der Phasenraum eines solchen Pendels sähe

also in etwa wie der Phasenraum in Abb.6 aus (Wobei es sich hierbei nicht um ein Fadenpendel, sondern um ein Federpendel handelt, was aber egal sind, da sich beide völlig äquivalent zueinander verhalten). Liegt der Anfangszustand des Pendels an einem leicht verschiedenen Punkt im Phasenraum, so wird die Bahn relativ ähnlich verlaufen. Kleine Störungen produzieren nur kleine Veränderungen. Ganz anders sieht das natürlich bei einem Chaospendel aus. Bei einem gedämpften, also reellen Chaospendel, bewegt sich die Bahn ebenfalls auf einen Attraktor zu. Wird es mechanisch angetrieben, so liegen auf der x-Achse des Phasenraums mehrere Attraktoren, die stabil liegen. Zwischen zwei solcher Attraktoren liegt ein instabiler Attraktor. Eine kleine Abweichung im Einzugsgebiet dieses Attraktors führt zu einem vollkommen anderen weiteren Verlauf der Bahn. An gewissen Punkten im Phasenraum ist der Zustand des Pendels also so instabil, dass eine winzige Störung ausreicht, die Bahn grundlegend zu ändern.

### 3.3 Besonderheiten meines Pendels

Ich nutzte für meine Forschung kein klassisches Doppelpendel, sondern eine getriebenes Chaospendel. Durch den Antrieb waren auch längere Messreihen nötig, die bei Messreihen zur Reibung notwendig ist. Der Schrittmotor kompensiert die Reibung natürlich nicht, sondern dient nur als Annäherungsversuch an das mathematische Pendel. Chaotisch ist mein Pendel jedoch auch. Wieso das so ist, beschreibe ich in Absatz 8.2 der Arbeit.



Abb.7: Mein Pendel

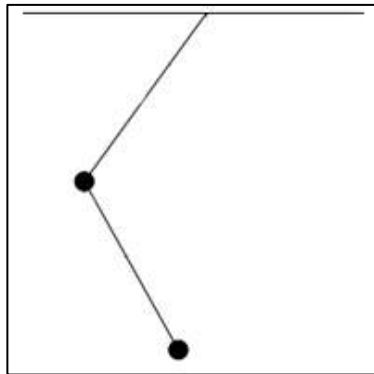


Abb.8: Gewöhnliches Doppelpendel

## 4. Hemmt Reibung ergodisches Verhalten?

Im folgenden Abschnitt erläutere ich die Motivation und die grundsätzliche Forschungsfrage meines Forschungsprojektes.

### 4.1 Das Ergoden-Theorem

In der Chaosforschung gibt es das sogenannte Ergoden-Theorem. Dabei handelt es sich um eine allgemeine Aussage über chaotische Systeme. Sie besagt folgendes: Chaotische Systeme haben die Eigenschaft, dass in einer Region des Phasenraums nach einer unendlichen Zeit jeder für das System zugängliche Punkt beliebig passiert worden ist. Je größer das Volumen der entsprechenden Region des Phasenraums, desto länger befindet sich System in der entsprechenden Region. Auf langen Zeitspannen betrachtet sind also alle möglichen Zustände absolut gleichwertig. In gewissen Situationen, etwa dem spontanen Symmetriebruch (wie beispielsweise der Übergang des Higgs-Feldes von einem stark variierenden Wert in vorinflationärer Zeit zu einem nichtverschwindenden Vakuumuntererwartungswert) wird diese Art von Symmetrie verletzt. Das Ergoden-Theorem wurde in leicht abgewandelter Form erstmals von Ludwig Boltzmann formuliert. Nun handelt es sich dabei natürlich um ein mathematisches Theorem, welches uneingeschränkt nur in idealisierten Systemen gilt. In der Realität gibt es allerdings Luftwiderstand und innere Reibung. Die Frage ist nun, ob ergodisches Verhalten beim Chaospendel überhaupt existiert oder ob Einflüsse wie Reibung und Luftwiderstand dies verhindern.



## 4.2 Möglichkeit der Charakterisierung von Chaos durch das Ergoden-Theorem

Damit einhergehend habe ich eine völlig ungewöhnliche Methode gefunden, Chaos zu charakterisieren, nämlich durch das Ergoden-Theorem. Um den Einfluss der Reibung nun nachzuweisen, muss ich die Reibung skalieren und eine Möglichkeit finden, sie zu variieren. Dann könnte ich Diagramme mit Reibungen verschiedener Stärke gegenüberstellen und könnte daraus den tatsächlichen Einfluss von Faktoren wie Reibung und Luftwiderstand ablesen.

## 5. Die Anfänge meines Projekts

Im kommenden Kapitel erkläre ich wie ich mein Forschungsprojekt entwarf und welche Möglichkeiten ich hatte.

### 5.1 Visualisierung des Chaos

Als ich mich entschloss, mein Projekt der Chaosforschung zu widmen, suchte ich nach einem Medium zur Visualisierung des Chaos. Der tropfende Wasserhahn war eine Option. Durch Messungen lässt sich eine Frequenz des Tropfens feststellen. Unter bestimmten Bedingungen kann man durch eine kleine Veränderung der Durchflussmenge mehrere zueinander parallel verlaufende Frequenzen erzeugen – ein Übergang ins Chaos, wie in einem späteren Teil dieser Arbeit erläutert ist. Doch nicht nur, weil es spektakulärer ist, sondern auch weil es einfacher zu messen und zu erklären ist, habe ich mich letztlich für das Chaospendel entschieden. Es hörte sich relativ einfach an, also fing ich 2016 mit meinem ersten Pendel an, welches recht einfach gebaut war. Zwei unterschiedlich lange Aluminiumplatten, die aneinandergeschraubt wurden und fertig. Rückblickend glaube ich nicht, dass dort irgendeine Art von verwendbaren Ergebnissen herausgekommen wäre, aber darum ging es zu diesem Zeitpunkt ja auch noch nicht. Es ging lediglich um das Sammeln von Erfahrungen und um das Erkennen des Chaos an einem Chaospendel.

### 5.2 Methoden zur Datensammlung

Zunächst habe ich die Schwingungen des Pendels nur beobachtet. Später habe ich angefangen, sie aufzunehmen, erst mit meinem Mobiltelefon, dann mit einer Webcam. Doch die Pendelbewegungen waren immer relativ kurz und kamen schnell zum Erliegen. Im Phasenraum würde der Graph also relativ schnell den Attraktor erreichen und sich nicht mehr bewegen. Das änderte ich, indem ich ein neues, kleineres Pendel baute und es mit einem Schrittmotor antrieb. Dieser ist leistungsstark genug, um das Pendel dauerhaft in heftige und vor allem gleichmäßige Bewegung zu versetzen. Denn um zuverlässige Werte zu erhalten, muss der Versuch reproduzierbar sein, gerade in der Chaosforschung gilt das umso mehr. Über eine Software konnte ich also die Geschwindigkeit des Pendels variieren. Mit einer Highspeed-Kamera fing ich an, Messungen vorzunehmen.

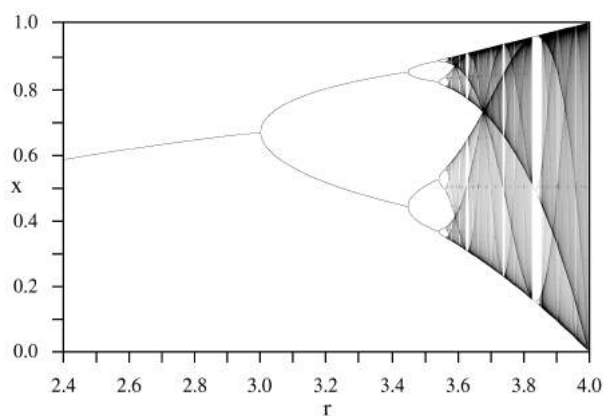


Abb.9: Ein Feigenbaum-Diagramm als Beispiel für Bifurkationsdiagramme

Insgesamt unterscheidet die Software 2047 verschiedene Geschwindigkeitsstufen. Ich maß in 50er-Schritten, da alles andere zu viel für die Auswertung gewesen wäre. Die beiden Punkte am Ende des zweiten Pendels und den am oberen Ende des ersten Pendels markierte ich mit Farbpunkten unterschiedlicher Farbe, was für die spätere Auswertung der Videos wichtig war.

### 5.3 Darstellungsmöglichkeiten

Neben dem in Kapitel 2 beschriebenen Phasenraum gibt es diverse Möglichkeiten zur Darstellung des Verhaltens des Pendels. Die einfachste dazu ist der Ortsraum. Der entspricht im Grunde genommen



dem normalen euklidischen Raum, in dem wir leben. Er gibt also die tatsächliche Trajektorie des Punktes wieder. Ihn zu erstellen, ist recht einfach. Die Farbpunkte, die ich im letzten Absatz erwähnte nutzte ich zum Tracken der Punkte. Ein Programm namens *Viana* konnte diese tracken und die Positionen des Punktes ermitteln. Diese gibt das Programm dann als Datentabelle aus. Die x- und y-Werte zur Position musste ich nur noch gegeneinander auftragen und schon erhielt ich Ortsraumdiagramme. Eine weitere Möglichkeit ist das sogenannte Bifurkationsdiagramm. Dieses Diagramm kann die sogenannte Periodenverdoppelung darstellen. Der Begriff der „Bifurkation“ wird auch für einen Fluss genutzt, der sich in mehrere Flüsse aufteilt. Nichts anderes bedeutet der Begriff auch in der Chaosforschung. Der Zustand verzweigt sich. Ein Bifurkationsdiagramm zeigt die sogenannte Periodenverdoppelung. In Abs. 5.1 schrieb ich über einen tropfenden Wasserhahn, bei dem mehrere parallel verlaufende Frequenzen erzeugt werden können. Durch diese Verdoppelung verzweigt sich das System immer weiter – ein Phänomen, welches schließlich im Chaos mündet.

## 6. Messungen mit Variierung der Anregungsfrequenz

Nachdem ich mich umfassend mit der Chaostheorie und dem Versuchsaufbau beschäftigt hatte, konnte ich nun anfangen selber Messungen vorzunehmen und sie auszuwerten. Das Prinzip der Auswertung mit dem Programm *Viana* erwähnte ich schon in Abs. 4.3 So variierte ich die Anregungsfrequenz, mit der ich das Pendel steuerte und erstellte folgende Ortsraumdiagramme.

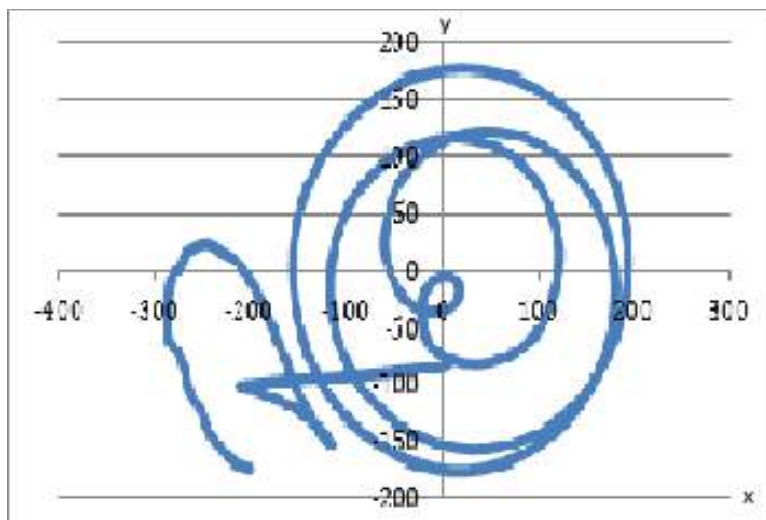


Abb.10: Ortsraum bei der Anregungsfrequenz 0,826 d/s

Hier erkennt man das chaotische Verhalten des Pendels relativ deutlich. Man erkennt die Ellipsenbewegung, man erkennt aber auch Überschläge. Diese Überschläge sind quasi das Tor zum Chaos. Sobald man bei einem Chaospendel Überschläge beobachtet, befindet man sich im Chaos. Schon optisch sind sie deutlich zu erkennen und das reicht aus, um intuitiv zu erkennen, wieso die Überschläge eine solche Bedeutung haben. Diese Phänomene ließen mich sofort erkennen, dass der Aufbau funktionierte. Hier sieht man einen der Überschläge links der anderen Ellipsen zwischen -300 und -200 der x-Achse und knapp über der Null der y-Achse. Ich war also eindeutig im Bereich des chaotischen Verhaltens. Dieses Diagramm ist nur ein kleiner Auszug an Daten. Würde man eine ganze Messreihe sehen, sähe man nichts als einen blauen Haufen. Die nächste Frage war natürlich, ob sich die Ortsräume verschiedener Frequenzen wesentlich unterscheiden. Dafür maß ich in weiteren Frequenzen und erstellte Ortsraumdiagramme.

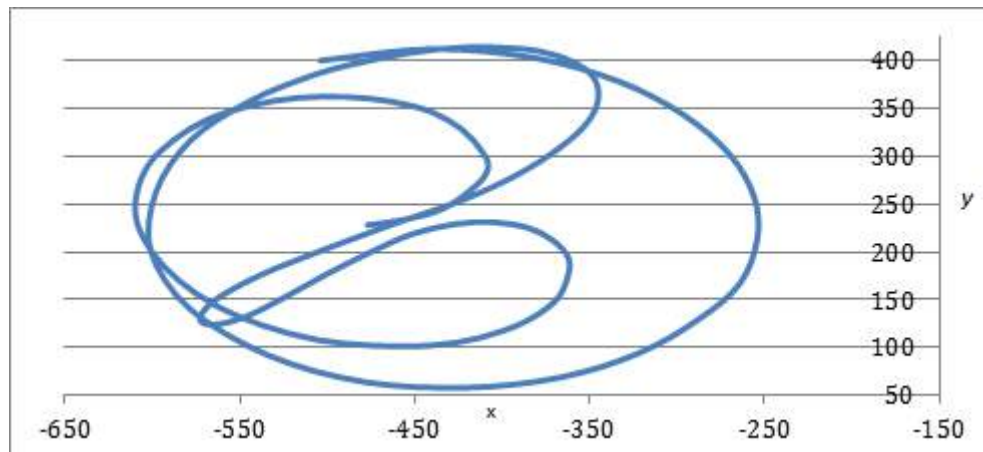


Abb.11: Ortsraum bei der Anregungsfrequenz  $1,18 \text{ d/s}$

Auch bei diesem Ortsraum, welcher eine höhere Frequenz darstellt, sind die Überschläge klar zu erkennen. Insgesamt sieht man drei Kurven des Graphen, die von einer Ellipse umschlossen sind. Auch hier handelt es sich bei den drei Ellipsen in der Ellipse um Überschläge, die das chaotische Verhalten charakterisieren. Auch hier liegt eindeutig Chaos vor. Das Resultat wird von anderen Ortsräumen nicht nur bestätigt, es zeigt auch, dass aus jeder Frequenz ein für sich charakteristisches Muster resultiert. Es folgen einige Phasenräume anderer Frequenzen. Die verschiedenen Skalierungen sind zu ignorieren:

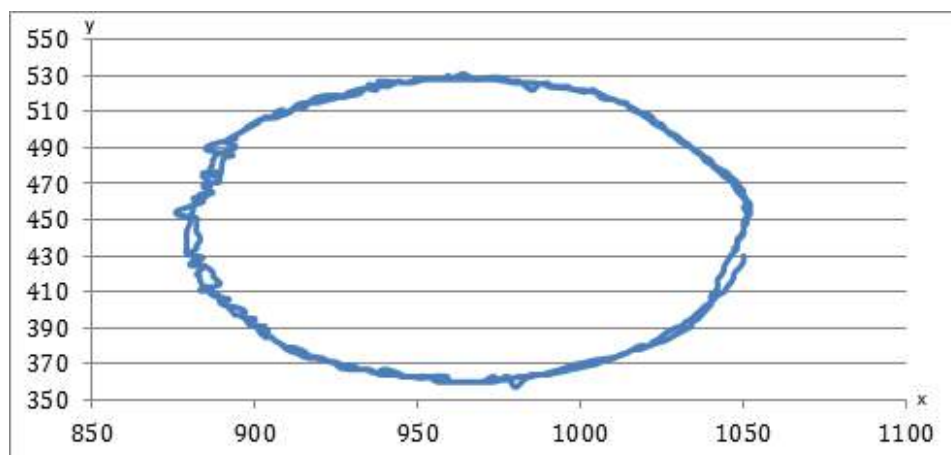


Abb.12: Bei diesem Diagramm mit der Frequenz  $0,118 \text{ d/s}$  sind noch keine Anzeichen von Chaos zu erkennen.

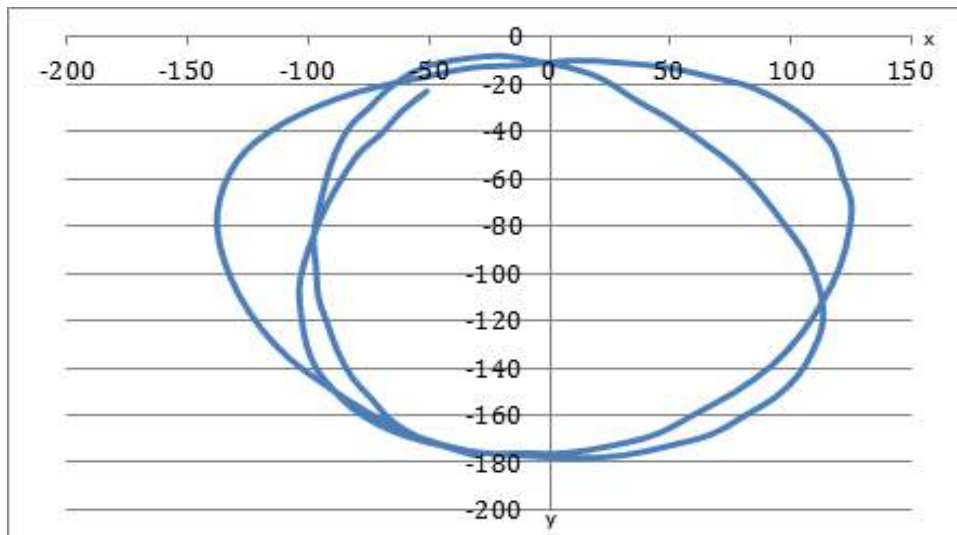


Abb.13: Bei der Anregungsfrequenz  $0,59 \text{ d/s}$  sind noch keine Überschläge oder gar chaotisches Verhalten zu beobachten.

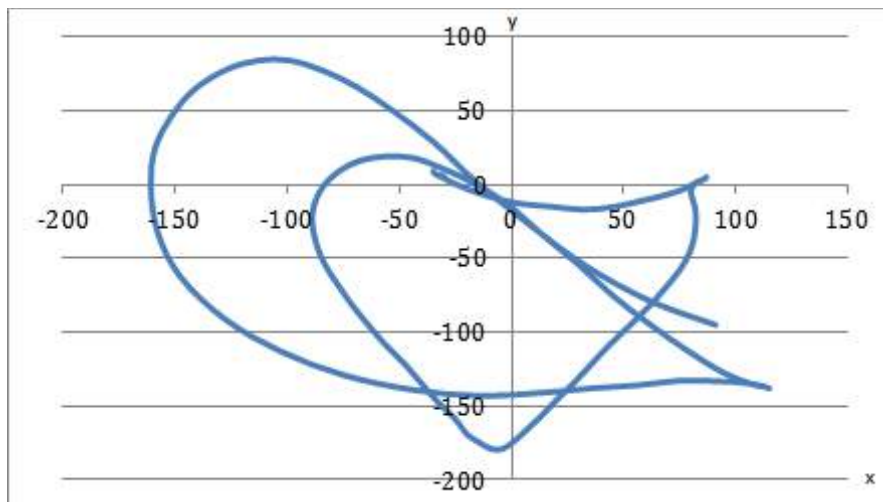


Abb.14: Bei  $0,703 \text{ d/s}$  fand erstmals mehr als ein Überschlag statt. Hier beginnt das Chaos.

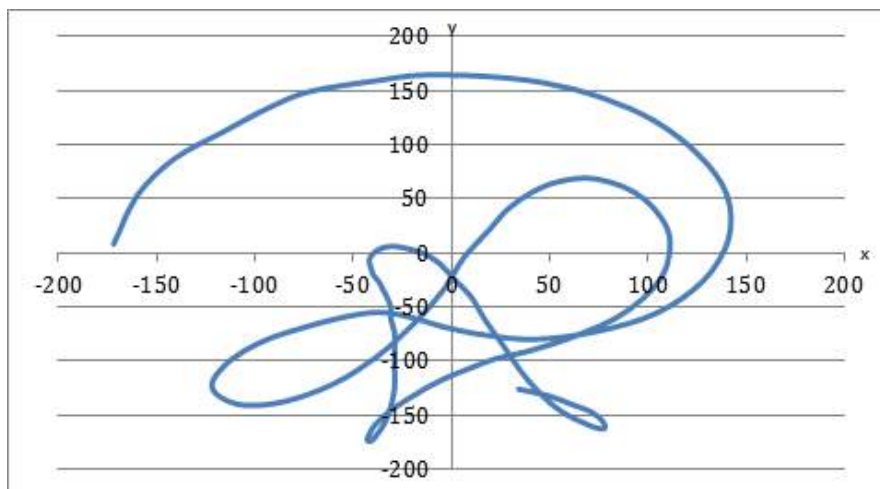


Abb.15:  $1,18 \text{ d/s}$  ist eine der höchsten Anregungsfrequenzen. Mit diesem Diagramm wird die zwar triviale, aber höchst wichtige Annahme bewiesen, dass das chaotische Verhalten frequenzabhängig ist.

## 7. Messungen zum Einfluss der Reibung

In Kapitel 4 beschrieb ich bereits die Fragestellung bezüglich der Reibung. Dieser Frage ging ich mit folgenden Methoden nach.

### 7.1 Zeitabhängige Untersuchung der Reibung

Zunächst untersuchte ich den Einfluss der Reibung an einem recht einfachen Aufbau. An der Verbindungsstelle zwischen dem ersten und dem zweiten Pendel liegt natürlich eine Reibungsquelle. Mit der Zeit nimmt die Reibung also Einfluss auf das System. Durch den Antrieb des Schrittmotors werden Aspekte der Reibung zwar kompensiert, doch wenn das chaotische Verhalten von der Reibung ausgebremst würde, sähe man das anhand der Reibung zwischen den Pendelstangen bereits. Also nahm ich mir eine Frequenz vor, die in der Lage ist, Chaos zu erzeugen und betrachtete die zeitliche Entwicklung. Ich trug also die ersten und die letzten 100 Punkte der Messung auf und verglich die daraus entstandenen Diagramme, da man dadurch den Einfluss der Reibung auf die chaotische Bewegung besonders gut erkennen kann.

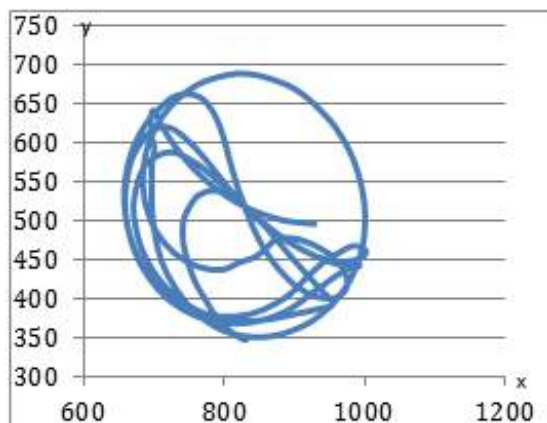


Abb.16: Erste 100 Messpunkte

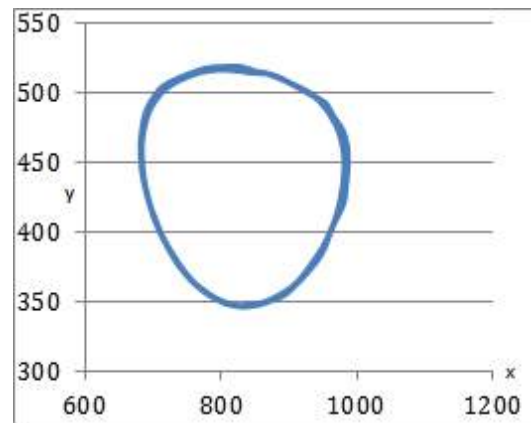
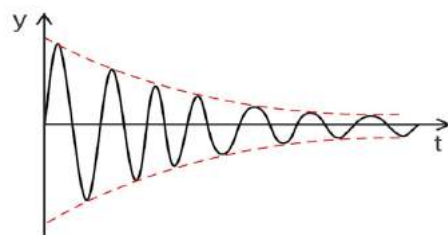


Abb.17: Letzte 100 Messpunkte

Diese Messungen sind natürlich ein Anfang. Schon in den Videos sieht man, dass sich das Pendel nach einer gewissen Zeit einpendelt und periodisch weiterpendelt. Dass das Pendel immer im selben Zustand endet, darf nicht so verstanden werden, dass das System einen Grenzzyklus durchlebt. Denn erstens gibt es die Grenzzyklen ausschließlich im Phasenraum und zweitens haben grenzzyklische Systeme diese Eigenschaft in sich, während hier die Reibung von Außen (oder auch die innere Reibung, das ändert aber das Paradigma an sich nicht) dieses Bild verursacht. Doch was passiert bei höheren Reibungen? Ist das Stadium des periodischen Verhaltens dann früher erreicht? Um das herauszufinden, muss ich verschiedene Reibungen vergleichen.

### 7.2 Möglichkeiten zur Variierung der Reibung

Zur Variierung der Reibung bieten sich verschiedene Verfahren an. Eine Möglichkeit wäre es, Öle verschiedener Viskosität zu nutzen. Dies wäre jedoch eine relativ aufwendige Prozedur. Also dachte ich mir, zwischen Reibung und Luftwiderstand müsste eine Äquivalenz vorherrschen. Anstatt die Reibung an der Verbindungsstelle zur variieren, kann man also auch einfach die Fläche des Pendels



und damit den Luftwiderstand, der ihm entgegengesetzt wird, verändern, was wiederum verhältnismäßig einfach wäre. Meine Idee war, ein laminiertes Blatt Papier an der Vorderseite des Pendels zu

Abb.18: Kurve eines gedämpften Pendels

befestigen.

### 7.3 Quantifizierung und Skalierung des Reibungseinflusses

Alleine damit ist mir allerdings noch nicht viel geholfen. Ich muss Reibung auch irgendwie skalieren und gezielt variieren und nicht einfach nur beispielsweise die Fläche des Papiers angeben, da ja nicht automatisch gegeben ist, dass der Luftwiderstand proportional zur Fläche ist. Dazu benötigte ich einige mathematische Kenntnisse. Wenn man die Zeit gegen die Position entlang der y-Achse aufträgt, erhält man bei einem idealen Pendel eine Abfolge an Sinuswellen. Verbindet man die Höhepunkte der Wellen, erhält man also eine Gerade. Das ist der Fall ohne Reibung. Bei einem Pendel mit Reibung werden die Sinuswellen immer kleiner. Verbindet man nun die Höhepunkte, dann erhält man als Graph eine sogenannte Exponentialfunktion, wie in Abb. 18 zu sehen ist. Eine Exponentialfunktion ist eine Zuordnung, die einem Wert  $x$  einen Wert  $e^x$  zuordnet.  $e$  ist hierbei die sogenannte Eulersche Zahl, wobei  $e \approx 2,718$ . Dabei handelt es sich um eine irrationale Konstante mit einer großen Besonderheit. Die Ableitung des Funktionsgraphen von  $e$ , also die beste lineare Annäherung, die einer Tangente zur Kurve entspricht, ist mit  $e$  selber identisch. Je größer die Reibung ist, desto steiler ist der Graph. Reibung 0 entspricht einer Gerade. Anhand der Steile der Exponentialfunktion kann ich also die Reibung skalieren und quantifizieren. Ich musste also eine Art Dämpfungsfaktor berechnen. Das tat ich folgendermaßen: Ich lenkte das Pendel ohne zusätzliches Blatt Papier zur Vergrößerung der Reibung um  $90^\circ$  (Der genaue Winkel ist irrelevant) aus und ließ es dann einfach los. So wurde die größte Auslenkung des Pendels von Schwingung zu Schwingung kleiner, bis es schließlich zum Stillstand kam. Das nahm ich auf und wertete es nach bekanntem Muster aus. Ich entwickelte ein Verfahren, mit dem ich den Dämpfungsfaktor des Pendels ermitteln konnte, ohne die Bewegungsgleichungen zu kennen, die ich noch nicht lösen kann. Dazu nutzte ich den Punkt an der Verbindungsstange (der sich bei Betrieb im Kreis bewegt) als Nullpunkt. Ich subtrahierte also alle Positionen entlang der x-Achse von der Linie, auf der der Punkt liegt. Entlang der y-Achse subtrahierte ich alle Positionen von der tiefsten Position, die am Ende der Messung erreicht ist. So erhielt ich die korrigierten Werte für die x- und y-Achse. Diese musste ich dann zu einer allgemeinen Bewegung kombinieren, was durch den Satz des Pythagoras möglich ist. Ich musste also lediglich die Wurzel aus der Summe der zweiten Potenzen der Positionen auf x- und y-Achse ziehen und erhielt so die allgemeine Bewegung. Dann wurde es etwas schwieriger. Zuerst musste ich den natürlichen Logarithmus des Wertes ermitteln. Ein Logarithmus ist quasi die Gegenoperation zur Exponentialfunktion. Der Logarithmus gibt an, mit welcher Zahl man eine Basis potenzieren muss, um eine andere vorher festgelegte Zahl zu erhalten. Der Logarithmus zur Basis  $e$ , also der Eulerschen Zahl, wird natürlicher Logarithmus genannt. Diesen natürlichen Logarithmus teilte ich durch den ersten Wert der Bewegung und den daraus entstehenden Wert dann durch die Zeit. Schließlich musste ich die Momente der schnellsten Bewegung selber in der Tabelle suchen und den dazugehörigen Wert der eben genannten Rechnungen notieren. Diese Werte habe ich dann gemittelt und ermittelte somit den Dämpfungsfaktor, den ich auf die dritte Nachkommastelle rundete.

### 7.4 Ergebnisse und Interpretation der Messreihen

Mit dieser Methode sammelte ich Messungen mit verschiedenen Luftwiderständen und wertete sie aus.

Fläche des Papiers	Berechneter Dämpfungsfaktor	Eintrittsfrequenz für Chaos
16,68 cm <sup>2</sup>	0,145/s	0,738 d/s
33,36 cm <sup>2</sup>	0,178/s	0,740 d/s
50,04 cm <sup>2</sup>	0,204/s	0,743 d/s
66,72 cm <sup>2</sup>	0,305/s	0,746 d/s
83,4 cm <sup>2</sup>	0,497/s	0,752 d/s
100,08 cm <sup>2</sup>	0,600/s	0,756 d/s

Dabei machte ich circa 35 Messungen, wovon ich nur wenige hier zeigen werde. Bei den Messungen variierte ich zwischen folgenden Luftwiderständen. Bevor ich zu den Graphen der einzelnen Frequenzen und Reibungen komme, ist es auch spannend zu erfahren, wie sich der Dämpfungsfaktor und die Eintrittsfrequenz des Chaos zur Fläche des Papiers verhalten. Dieses Verhältnis stellen Abb. 18 und 19 dar.

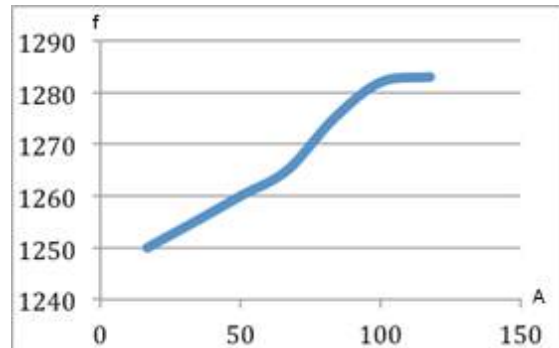
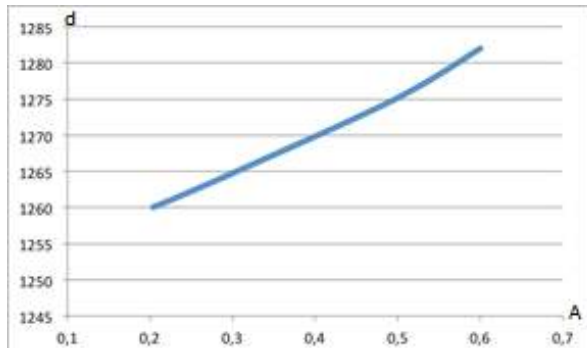


Abb.19: Fläche des Papiers – Dämpfungsfaktor    Abb.20 Fläche des Papiers –Chauseintrittsfrequenz

Abb.18 zeigt eine fast perfekte Gerade, was auch soweit logisch ist. Reibung ist ein mechanisches Phänomen und wächst somit proportional zur Fläche des Papiers. Diese Gerade ist absolut typisch für proportionale Zuordnungen. Abb.19 ist etwas komplizierter, denn hier geht es um den Eintritt des Chaos, es ist also keine rein mechanische Sache mehr. Ganz am Anfang steigt die Chauseintrittsfrequenz recht langsam, ändert sich aber kontinuierlich schneller. Hier reagiert das chaotische Verhalten sehr empfindlich auf kleine Änderungen der Reibung. Bei sehr hohen Anregungsfrequenzen nähert sich die Chauseintrittsfrequenz jedoch einem Sättigungswert. Hier spielt die Reibung kaum mehr eine Rolle. Diese These habe ich auch durch Messdaten belegt, die ich in einem späteren Teil der Arbeit zeige (siehe Abb.23).

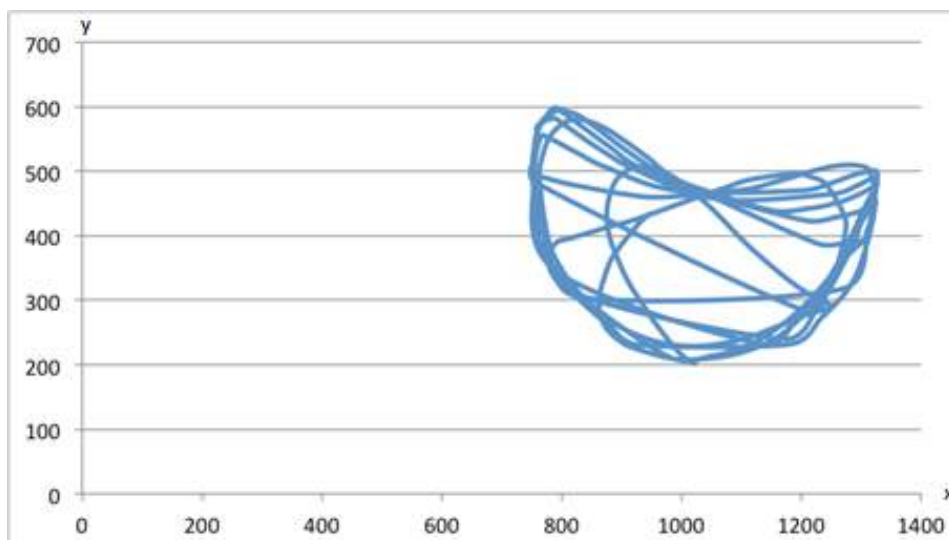


Abb.21: Ortsraum der Frequenz 0,737 d/s bei einem Dämpfungsfaktor von 0,145



In Abb.21 sieht man das Ortsraumdiagramm der Frequenz 0,737 d/s. Hier wurde ein Blatt Papier mit der Fläche von  $16,69 \text{ cm}^2$  an das Pendel geklebt. Am Diagramm erkennt man, dass es sich um eine Frequenz handelt, die kein Chaos entstehen lässt, was etwas seltsam ist, das normalerweise das Chaos schon bei 0,703 d/s eintritt (Abb.14). Das bedeutet durch das Ankleben eines so kleinen Blattes hat sich die Chauseintrittsfrequenz um 0,035 d/s nach oben bewegt. Dieser doch relativ große Effekt kam für mich sehr unerwartet. Erst bei einer Frequenz von 0,738 d/s zeigt sich ein chaotisches Verhalten, wie Abb.22 zeigt.

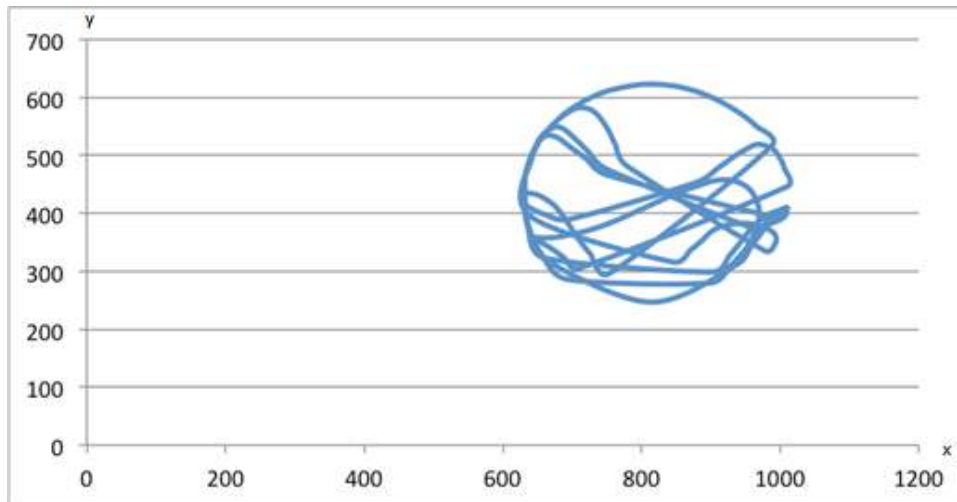


Abb.22: Klar chaotisches Verhalten

Diesen Prozess habe ich zu allen Reibungen durchgeführt und die stetig höher werdende Chauseintrittsfrequenz dargestellt. Da die Chauseintrittsfrequenz jedoch fast immer gleich aussieht (ein Überschlag, danach chaotisches Verhalten) belasse ich es bei einer Darstellung. Bei sehr hohen Frequenzen kann die Reibung jedoch nicht viel ausrichten. So unterscheidet sich das Diagramm der Frequenz 1,18 d/s mit einem laminierten Blatt Papier nur unwesentlich vom Diagramm derselben Frequenz ohne zusätzlichen Luftwiderstand.

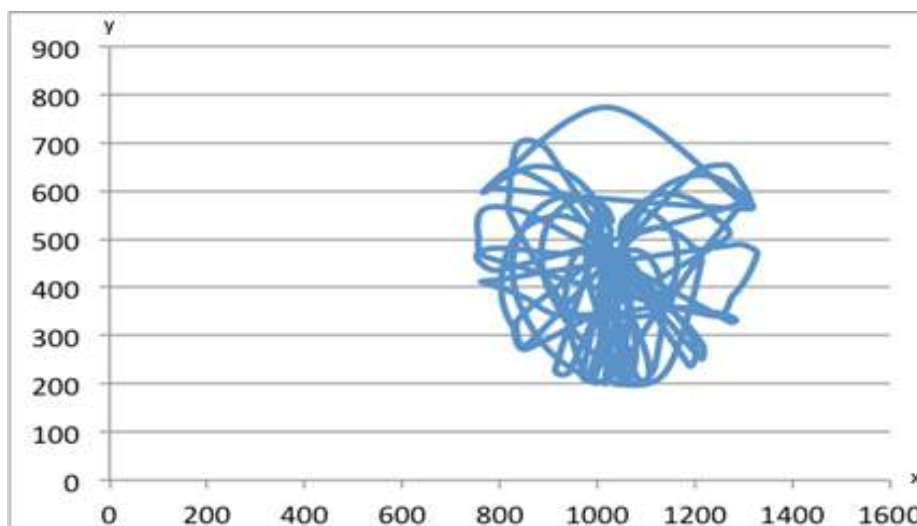


Abb.23: Bei sehr hohen Frequenzen verliert die Reibung ihren Einfluss fast gänzlich.

Auch hier ist die Darstellung weiterer Frequenzen nicht nötig, da der Einfluss der Reibung und damit die Unterschiede zwischen den verschiedenen Reibungen sehr gering sind. Dies bestätigt auch die Messungen ohne zusätzlichen Luftwiderstand. Auch dort stachen sehr hohe Anregungsfrequenzen dadurch heraus, dass sie sich gar nicht einzupendeln schienen und somit dem Muster von Abb. 16



und 17 widersprechen. Der Einfluss der Reibung scheint an einer Schwelle schlagartig abzufallen, während sie bei gewissen Anregungsfrequenzen (nahe der Chaoseintrittsfrequenz) einen riesigen Unterschied machen kann. Dies zeigt ein Vergleich zwischen Abb. 14 und Abb.21. Obwohl Abb.21 eine viel höhere Frequenz zeigt als Abb.14, ist Abb.18 im Gegensatz zu ihr nicht chaotisch. Hier hat die Reibung das Chaos noch fest im Griff. Dies ist auch die Erklärung für die Kurve von Abb.19. Egal, welche Reibung ich wählte und egal, wie lang ich das Pendel laufen ließ, der Ortsraum der Frequenz 1,18 d/s änderte sich kaum. Hier ist das chaotische Verhalten fast vollkommen unabhängig von der Reibung, die Sättigungsfrequenz, die in Abb.19 dargestellt wurde, ist hier erreicht.

## 8. Erstellung eines Phasenraumes

Im folgenden Kapitel erläutere ich meine Vorgehensweise und die Schwierigkeiten beim Erstellen von Phasenräumen.

### 8.1 Dimensionen des Phasenraumes

Für die graphische Darstellung mit mir zugänglichen Mitteln darf ein Diagramm lediglich zwei Dimensionen haben. Wie viele Dimensionen hat der Phasenraum meines Pendels? Bei einem normalen Chaospendel, das nicht angetrieben wird, gestaltet sich das sehr schwierig. Denn das Chaos wird dort durch die sogenannte Rückkoppelung verursacht. Das erste Pendel wirkt auf das Zweite und das Zweite zurück auf das Erste. Dadurch bräuchte man die Winkel beider Pendel und deren Winkelgeschwindigkeiten. Das wären dann vier Dimensionen und zu viel für die graphische Darstellung. Bei meinem Pendel ist das etwas anders, denn mein Pendel ist ein getriebenes Pendel. Das erste Pendel hat also immer dieselbe Geschwindigkeit. Ich kann zu jeder Zeit genau sagen, wie das erste Pendel in irgendeiner beliebigen Zeit stehen wird. Dadurch, dass die Geschwindigkeit des ersten Pendels durch den Schrittmotor bestimmt ist, kann auch keine Rückkoppelung zwischen dem ersten und dem zweiten Pendel stattfinden. Das chaotische Verhalten meines Pendels hat demnach einen anderen Ursprung, der vermutlich in einem anderen Effekt liegt. Bei sehr geringen Auslenkungen verhält sich das getriebene Pendel quasi wie ein Pendel mit einer Periode. Wächst die Auslenkung jedoch, so entstehen zwei verschiedene Perioden, die von der Amplitude des Pendels selbst abhängig sind. Die Rückkoppelung zwischen der Veränderung der Perioden und der Veränderung der Amplitude könnte die Ursache für das chaotische Verhalten meines Pendels sein. Was bedeutet das nun für die Dimensionen des Phasenraumes? Dadurch, dass das Verhalten des ersten Pendels absolut vorhersehbar und vorbestimmt ist, verliert das Pendel zwei Freiheitsgrade. Dadurch wiederum verliert der Phasenraum zwei Dimensionen, Winkel und Winkelgeschwindigkeit des ersten Pendels werden irrelevant. Dadurch müsste der Phasenraum meines Pendels eigentlich zwei Dimensionen haben und darstellbar sein.

### 8.2 Erwartete Gestalt des Phasenraumes

Obwohl ich bisher keine Phasenräume erstellt habe, kann ich bereits Vermutungen über das Erscheinungsbild des Phasenraumes eines Chaospendels anstellen. Ein gewöhnliches Pendel bewegt sich wie in Abb.2 sichtbar auf einen Punktattraktor zu. Befindet es sich im Vakuum oder ist es betrieben, dann beschreibt die Bahn lediglich einen Kreis. Das kann man sich relativ einfach vorstellen, schließlich variiert auch die Geschwindigkeit des Pendels in einem Kreislauf. Am Anfang nimmt die Geschwindigkeit des Pendels zu, erreicht an der Stelle der größten Auslenkung ihr Maximum und nimmt danach wieder ab, bis das Pendel, bei der maximalen Auslenkung nach oben für einen infinitesimalen Moment zum Stillstand kommt und der Kreislauf von vorne beginnt. So weit, so gut, doch wie verhält es sich bei einem chaotischen Pendel? Chaotisches Verhalten müsste sich dann durch Abweichungen von diesem Kreis manifestieren.

## 9.Fazit

In diesem Kapitel geht es um die gewonnenen Erkenntnisse und die zukünftige Weiterentwicklung.

### 9.1 Beantwortung der Fragestellung

Mit den gesammelten Daten lässt sich die in Kapitel 4 genannte Forschungsfrage beantworten. Man sieht daran ganz klar, sowohl dass innere Reibung, als auch der Luftwiderstand das chaotische Verhalten ausbremsen. Das Ergoden-Theorem, welches besagt, dass irgendwann jeder energetisch mögliche Punkt des Phasenraumes auch passiert wurde, hat somit nur beschränkte Aussagekraft für unsere Realität. Denn in der Realität wird das Chaos schon viel früher durch die eben genannten äußeren Einflüsse ausgebremst. So kann ich mein Pendel so lange laufen lassen wie ich will, jeder Punkt wird wohl nie erreicht sein, denn schon nach wenigen Minuten ist die Sache normalerweise gelaufen. Im Internet gibt es natürlich Simulationen von Chaospendeln, die sich sämtlichen äußeren Einflüssen entziehen. Ein ergodisches Verhalten weisen diese jedoch auch nicht auf, denn all diese Simulationen beruhen auf Algorithmen, die sich nach einer gewissen Zeit wiederholen. Alles was also beim ersten Durchgang unerreicht blieb, wird dies auch auf ewig bleiben. Das Ergoden-Theorem ist also ein mathematisches Modell, nicht mehr und nicht weniger. Des Weiteren enthält Tab.1 ein unerwartetes Ergebnis. Meine Vermutung war, dass bei höheren Reibungen der Zustand des periodischen Verhaltens schneller erreicht ist. Diese Vermutung wurde auch bestätigt. Allerdings verschiebt sich auch die Frequenz, ab der Chaos eintritt und das sogar ziemlich deutlich. Bei höherer Reibung ist also auch ein höherer Impuls nötig, um überhaupt in das Gebiet des Chaos zu kommen. Dieses Phänomen ist nicht trivial und auch überraschend. Ich entdeckte es tatsächlich erst bei der Messung, als ich die Zeitdifferenz des Eintretens des periodischen Verhaltens zwischen verschiedenen Reibungen mit einer Frequenz, die Chaos hervorbringen kann untersuchte und feststellte, dass diese plötzlich gar nicht mehr chaotisch war. Diese Beobachtung veranlasste mich dazu, den Sachverhalt weiter zu untersuchen und ihn in Tabelle in Kapitel 7.4 zusammenfassend darzustellen.

Hier folgt eine kurze Zusammenfassung meiner wichtigsten Ergebnisse:

- Beim Chaospendel ist chaotisches Verhalten frequenzabhängig
- Mit der Reibung verschiebt sich auch die Frequenz, ab der das Chaos eintritt
- Reibung bremst das Chaos aus und verhindert die Erfüllung des Ergoden-Theorems in der Realität
- Bei hohen Frequenzen verliert die Reibung beinahe vollkommen ihren Einfluss

### 9.2 Zukunftsaussichten

Die nahe Zukunft meines Projektes steht im Zeichen des Phasenraumes. Bei einem nicht getriebenen Chaospendel wäre das Problem der Mehrdimensionalität, den es bei meinem nicht gibt, somit ist der Phasenraum für mein Pendel durchaus einfach zweidimensional darstellbar. Durch den Phasenraum wird sich das chaotische Verhalten noch detaillierter darstellen lassen. Im Phasenraum gibt es auch die Möglichkeit spezielle Attraktoren, womöglich Grenzyklen, aber auch seltsame Attraktoren zu finden. Neben dem Phasenraum sind sowohl das Bifurkationsdiagramm als auch das Entwicklungsdiagramm vielversprechende Darstellungsmöglichkeiten, die selbst wiederum neue Möglichkeiten eröffnen könnten, wobei die Erstellung des Bifurkationsdiagramms eine große Menge an Daten benötigt. Da ich durch mein Projekt die Forschungsfrage zufriedenstellend beantwortet habe und es dennoch noch viele offene Fragen gibt, die ich beantworten möchte lasse ich mich davon aber nicht abschrecken. Das darf man sowieso nie, denn anders ist es nicht möglich, jene Kraft vollständig zu verstehen, deren Bedeutung von der Wissenschaft gerade erst richtig verstanden wird.

## 9.Quellen, Bilderverzeichnis und Literatur

<https://de.wikipedia.org/wiki/Doppelpendel>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Chaosforschung>

[https://www.univie.ac.at/physikwiki/images/8/80/Der\\_Phasenraum.pdf](https://www.univie.ac.at/physikwiki/images/8/80/Der_Phasenraum.pdf)

<http://scienceblogs.de/astrodicticum-simplex/2009/05/29/chaotische-systeme-teil-1-der-phasenraum/>

<https://www.uni-kassel.de/fb10/fileadmin/datas/fb10/physik/oberflaechenphysik/exp2/Lehre/ExpPhysI/Chaos.pdf>

<https://www.spektrum.de/lexikon/psychologie/chaostheorie/2778>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Attraktor>

[https://de.wikipedia.org/wiki/Seltsamer\\_Attraktor](https://de.wikipedia.org/wiki/Seltsamer_Attraktor)

<https://de.wikipedia.org/wiki/R%C3%A4uber-Beute-Beziehung>

[https://de.wikipedia.org/wiki/Tangens\\_und\\_Kotangens](https://de.wikipedia.org/wiki/Tangens_und_Kotangens)

<https://www.nasa.gov/image-feature/jpl/pia20512/chaos-at-hyperion>

<https://www.spektrum.de/lexikon/physik/dreikoerperproblem/3389>

<http://scienceblogs.de/astrodicticum-simplex/2015/06/09/unloesbar-und-faszinierend-das-dreikoerperproblem/>

[https://de.wikipedia.org/wiki/Bifurkation\\_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Bifurkation_(Mathematik))

<http://walter.bislins.ch/blog/index.asp?page=Feigenbaum-Diagramm+erzeugen+und+analysieren>

[https://de.wikipedia.org/wiki/Logistische\\_Gleichung](https://de.wikipedia.org/wiki/Logistische_Gleichung)

<https://de.wikipedia.org/wiki/Selbst%C3%A4hnlichkeit>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Ergodenhypothese>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Ergodic\\_hypothesis](https://en.wikipedia.org/wiki/Ergodic_hypothesis)

[https://www.math.uni-hamburg.de/home/gunesch/Vorlesung/WiSe2007-8/Ergodentheorie/Skript/Skript\\_Ergodentheorie.pdf](https://www.math.uni-hamburg.de/home/gunesch/Vorlesung/WiSe2007-8/Ergodentheorie/Skript/Skript_Ergodentheorie.pdf)

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437106000549>

<https://link.springer.com/article/10.1007/BF00384333>

**Abb.1:** [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/68/Hyperion\\_PIA07740.jpg/280px-Hyperion\\_PIA07740.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/68/Hyperion_PIA07740.jpg/280px-Hyperion_PIA07740.jpg)

**Abb.2:** [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/58/Phasenportraet\\_mit\\_vektorfeld.svg/1280px-Phasenportraet\\_mit\\_vektorfeld.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/58/Phasenportraet_mit_vektorfeld.svg/1280px-Phasenportraet_mit_vektorfeld.svg.png)

**Abb.3:** [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/30/Limit\\_cycle\\_Poincare\\_map.svg/1024px-Limit\\_cycle\\_Poincare\\_map.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/30/Limit_cycle_Poincare_map.svg/1024px-Limit_cycle_Poincare_map.svg.png)

Abb.4: [http://www.itm.uni-stuttgart.de/courses/nichtlineare\\_schwingungen/bilder/lorenz.jpg](http://www.itm.uni-stuttgart.de/courses/nichtlineare_schwingungen/bilder/lorenz.jpg)

Abb.5: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/dd/Asteroidenverteilung.PNG>

Abb.6:

[https://www.researchgate.net/profile/Wolfgang\\_Wildgen/publication/37932696/figure/fig1/AS:669544821583872@1536643333020/Abbildung-13-Kreis-Trajektorie-des-Pendels-im-Orts-Geschwindigkeits-Phasenraum\\_Q320.jpg](https://www.researchgate.net/profile/Wolfgang_Wildgen/publication/37932696/figure/fig1/AS:669544821583872@1536643333020/Abbildung-13-Kreis-Trajektorie-des-Pendels-im-Orts-Geschwindigkeits-Phasenraum_Q320.jpg)

Abb.8

Abb.9: [http://deacademic.com/pictures/dewiki/76/LogisticMap\\_BifurcationDiagram.png](http://deacademic.com/pictures/dewiki/76/LogisticMap_BifurcationDiagram.png)

Abb.18: <https://physikunterricht-online.de/wp-content/uploads/2014/10/Ged%C3%A4mpfte-Schwingung.jpg>

Literatur: Die Entdeckung des Chaos: eine Reise durch die Chaos-Theorie